ЗАДАЧИ МЕЖДУНАРОДНОГО КОНКУРСА «Кенгуру»

2003 **9 — 10 классы**

Задачи, оцениваемые в 3 балла

1. Значение выражения $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2003}\right)$ равно

(A) 2004 (B) 2003 (C) 2002 (D) 1002 (E) 1001

2. Круглая клумба в нашем саду имеет диаметр 1,2 м. В соседнем саду круглая клумба имеет площадь в 4 раза больше нашей. Каков ее диаметр?

(A) 2,4 м (B) 3,6 м (C) 4,8 м (D) 6,4 м (E) 9,6 м

3. Когда бочка пуста на 30%, она содержит на 30 литров больше меда, чем когда она полна на 30%. Сколько литров меда в полной бочке?

(A) 60 (B) 75 (C) 90 (D) 100 (E) 120

4. Маша нарисовала на экране компьютера букву **У**, а потом нажала последовательно три кнопки: «повернуть на 90° по часовой стрелке», «заменить на зеркальное изображение» и «повернуть на 180°». Какую картинку она увидит?

(A) ≻ (B) ≺ (C) ʎ (D) ≺ (E) Ɣ

5. Если сумма углов треугольника равна a, то квадрат угла квадрата равен

(A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a^2}{2}$ (C) $\frac{a^2}{4}$ (D) $\frac{a}{4}$ (E) a^2

6. Чему равна сумма $|2-\sqrt{5}| + |3-\sqrt{5}|$?

(A) $5-2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}-5$ (C) $2\sqrt{5}+5$ (D) 1 (E) 5

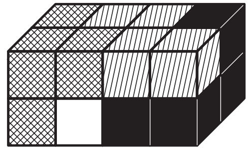
7. Ребро куба равно 1. Муха ползает по ребрам этого куба, не проходя по одному ребру дважды (но, возможно, проходя несколько раз через одну вершину). Какой самый длинный путь она может проползти?

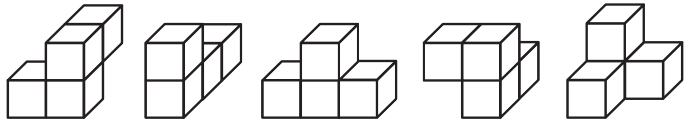
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

8. Вася составляет всевозможные дроби вида $\frac{a}{b}$, беря a из набора {68, 60, 54, 51, 48, 45}, а b — из набора {20, 17, 15, 12}. Каково отношение самой большой и самой маленькой таких дробей?

(A) $\frac{68}{27}$ (B) $\frac{68}{3}$ (C) $\frac{51}{4}$ (D) $\frac{17}{12}$ (E) $\frac{17}{9}$

9. Из четырех деталей, каждая из которых состоит из четырех маленьких кубиков, сложили прямоугольный параллелепипед, показанный на рисунке. Каждая деталь окрашена в свой цвет. Как выглядит белая деталь?



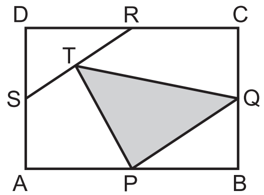


(A) (B) (C) (D) (E)

10. Сколькими способами можно записать число 2003 в виде суммы $a + b$, где a и b — простые числа и $a < b$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) более 3

Задачи, оцениваемые в 4 балла



11. В прямоугольнике *ABCD* площади 1 точки *P*, *Q*, *R* и *S* — середины его сторон, *T* — середина отрезка *RS*. Какова площадь треугольника *PQT*?

(A) $\frac{5}{16}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{3}{8}$

12. На координатной плоскости даны прямые $y = 2 + x$ и $y = 1 - x$. Они разбивают плоскость на 4 части. Занумеруем эти части против часовой стрелки, начиная с той, в которой лежит начало координат. В какой из частей лежит точка *A* (–2003, 2003)?

(A) в первой (B) во второй (C) в третьей
(D) в четвертой (E) на одной из данных прямых

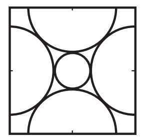
13. Сколькими способами числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 можно разбить на пары, чтобы отношения чисел во всех парах были одинаковыми?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) более 3

14. Костя Сергеев из $9^{а}$ класса и 8 его друзей из той же школы отправились в поход. Оказалось, что среди любых четырех из этих туристов обязательно есть одноклассники, а среди любых пяти — не больше, чем три одноклассника. Сколько учеников $9^{а}$ класса пошли в поход?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1 (E) невозможно определить

15. Центры четырех полукругов, изображенных на рисунке, лежат на серединах сторон квадрата. Радиусы этих полукругов равны 1. Каков радиус окружности, которая касается этих четырех полукругов?



(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\frac{1}{2}\pi-1$ (C) $\sqrt{3}-1$

(D) $2\sqrt{2}-2$ (E) $2-\sqrt{2}$

16. Будем называть старшим делителем числа n самый большой из его делителей, отличных от самого числа n. Аналогично, младший делитель числа n — это самый маленький его натуральный делитель, отличный от 1. Сколько существует таких натуральных чисел n, для которых старший делитель в 18 раз больше младшего?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) бесконечно много (E) другой ответ

17. Правильный шестиугольник и правильный треугольник имеют одинаковые периметры. Каково отношение их площадей?

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 4 (E) 6

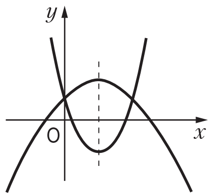
18. В прямоугольнике 1000×1003, нарисованном на клетчатой бумаге, провели диагональ. Сколько клеточек она разрезала?

(A) 1000 (B) 1003 (C) 2002 (D) 2003 (E) 2004

19. У Маши есть 6 карточек, на каждой из которых написано натуральное число. Она произвольно выбирает 3 карточки и вычисляет сумму чисел, написанных на них. Проделав это для всех 20 возможных комбинаций из трех карточек, она обнаружила, что 10 сумм равны 16, а остальные 10 сумм — 18. Тогда наименьшее из чисел на карточках равно

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20. На чертеже изображены две параболы. Их вершины лежат на прямой, параллельной оси *OY*. Одна из них имеет уравнение $y = ax^2 + bx + c$, а уравнение второй параболы имеется среди уравнений



(1) $y = -ax^2 - bx + c$ (2) $y = -2ax^2 - bx + c$

(3) $y = -2ax^2 - 2bx + c$ (4) $y = -2ax^2 + 2bx + c$

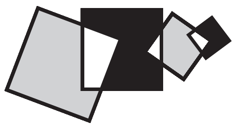
(5) $y = -ax^2 + cx + b$

Каково уравнение второй параболы?

(A) (1) (B) (2) (C) (3) (D) (4) (E) (5)

Задачи, оцениваемые в 5 баллов

21. На рисунке изображены 4 пересекающихся квадрата со сторонами 11, 9, 7 и 5 см. На сколько сумма площадей двух серых областей больше суммы площадей двух черных областей?



(A) 25 см^2 (B) 36 см^2 (C) 64 см^2

(D) 0 (E) невозможно определить

22. На книжной полке стоят 50 книг по математике и физике. Никакие 2 книги по физике не стоят рядом, но рядом с каждой книгой по математике стоит другая книга по математике. Какое из следующих утверждений может быть неверным?

(A) книг по математике хотя бы 32
(B) книг по физике не более 17
(C) есть 3 книги по математике, стоящие подряд
(D) если книг по физике 17, то одна из них — первая или последняя на полке
(E) среди любых 9 стоящих подряд книг хотя бы 6 — по математике

23. Известно, что $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$. Какое число из набора $\frac{1}{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$, a^2, a^3 не может быть самым большим в этом наборе?

(A) $\frac{1}{a}$ (B) $\sqrt[3]{a^2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ (D) a^2 (E) a^3

24. Имеется 6 палочек с длинами 2, 4, 4, 10, 22, 37 см. Сколько различных равнобедренных трапеций можно сложить, каждый раз используя все палочки?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

25. Маша старше Миши ровно на один месяц (дни их рождения приходятся на одно и то же число в двух соседних месяцах), а Даша старше Миши на столько же дней, на сколько Маша старше Даши. В каком месяце не могла родиться Даша?

(A) в апреле (B) в мае (C) в июле (D) в августе (E) в декабре

26. Каково наибольшее возможное значение площади выпуклого четырехугольника, если длины его последовательных сторон равны 1, 4, 7 и 8?

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 30

27. Сколько различных пар вещественных чисел (x, y) удовлетворяют уравнению $(x + y)^2 = (x + 3)\cdot(y - 3)$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) бесконечно много

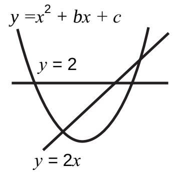
28. Разглядывая 6 одинаковых монет, которые лежат на столе и не касаются друг друга, Вася обнаружил, что некоторые из них «заперты»: никакую из них нельзя сдвинуть со стола, не задевая других монет. Какое наибольшее количество «запертых» монет он мог увидеть?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

29. Сколько существует таких натуральных n, что остаток от деления 2003 на n равен 23?

(A) 22 (B) 19 (C) 13 (D) 12 (E) 87

30. На координатной плоскости нарисовали прямые $y = 2$, $y = 2x$ и параболу $y = x^2 + bx + c$. Потом координатные оси стерли. Получился рисунок, изображенный справа. Какое из следующих соотношений возможно?



(A) $c = 3$ (B) $b = -2$ (C) $b + c > 1$

(D) $b^2 < 4c - 9$ (E) $b + c < -2$

Время, отведенное на решение задач, — 75 минут!